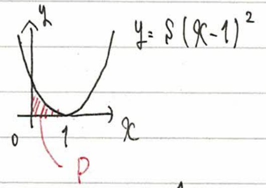
Date . . No.

2017年 東大文系数学 第1問

3つの情報から、3本の等式を作る。

① Pの定義

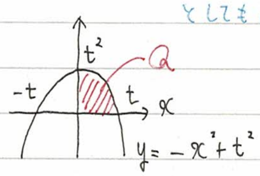


$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx=\left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

$$\int_0^1(sx^2-2sx+s)dx=\left[\frac{s}{3}x^3-sx^2+sx\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

としてもよい。

② Qの定義



$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$

③ AとBが1点で接する条件　「接する」と来れば、連立して判別式0

$y=s(x-1)^2$ と $y=-x^2+t^2$ を連立して、

$s(x-1)^2=-x^2+t^2$

$sx^2-2sx+s=-x^2+t^2$

$(s+1)x^2-2sx+s-t^2=0$

(判別式)$/4=(-s)^2-(s+1)(s-t^2)=0$

$s^2-(s^2-st^2+s-t^2)=0$

$st^2-s+t^2=0$

以上より　$P=\frac{s}{3}$　$Q=\frac{2}{3}t^3$　$st^2-s+t^2=0$

の3式が得られた。

よって、$st^2-s+t^2=0$　$0<s$，$0<t<1$ の条件下で、

$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{s}{3}}=\frac{2t^3}{s}$ の最大値を求めればよい

sとtのどちらを消去する？

sを消去すると、分数関数になるかも…

tを消去すると無理関数（$\sqrt{\ }$の関数）になるかも…

悩んだら、両方やってみれば良い。

今回はsを消去するのが正解

$st^2-s+t^2=0 \iff s=\frac{-t^2}{t^2-1}$ （$\because t\neq\pm1$）より

$$\frac{Q}{P}=\frac{2t^3}{s}=\frac{2t^3}{\frac{-t^2}{t^2-1}}=-2t(t^2-1)$$

分数が消えて3次関数になった!!

より、$f(t)=-2t(t^2-1)$ とおくと、

$0<t<1$ での $f(t)$ の最大値を求めればよい。

あとはただの3次関数の問題。

$f'(t)=(-2t^3+2t)'$

$=-6t^2+2$

$=-2(3t^2-1)$

増減表は、

t	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	極大	↘	

なので、

最大値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right)$

$=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{4\sqrt{3}}{9}$ //

ちなみに、

$s=\frac{-t^2}{t^2-1}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{2}$ で $0<s$ をみたす。